Exercice 1: Loi E/S – Fermeture de chaîne

Etude géométrique

Question 1: Etablir les 3 équations géométriques du problème dans la base 0

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$
$$L_1\overrightarrow{x_1} + L_2\overrightarrow{x_2} - \lambda_{3/0}\overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$
$$L_1 \cos\theta_{1/0}\,\overrightarrow{x_0} + L_1 \sin\theta_{1/0}\,\overrightarrow{y_0} + L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10})\,\overrightarrow{x_0} + L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10})\,\overrightarrow{y_0} - \lambda_{3/0}\overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} L_1\cos\theta_{10} + L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10}) = 0 \\ L_1\sin\theta_{10} + L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) - \lambda_{30} = 0 \end{cases}$$

Ajoutons l'équation de fermeture angulaire :

$$(\widehat{\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}}) + (\widehat{\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_3}}) + (\widehat{\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{x_0}}) = 0$$
$$\theta_{10} + \theta_{21} + \theta_{32} + \frac{\pi}{2} = 0$$

Soient 3 équations :

$$\begin{cases} L_1\cos\theta_{10} + L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10}) = 0 \\ L_1\sin\theta_{10} + L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) - \lambda_{30} = 0 \\ \theta_{10} + \theta_{21} + \theta_{32} + \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

Question 2: Etablir la relation entrée/sortie en position $\lambda_{30} = f(\theta_{10})$ – On justifiera le besoin d'avoir $L_2 \geq L_1$ ainsi que la présence de deux solutions avant de choisir la bonne

Méthode de somme des carrés :

$$\begin{cases} \cos(\theta_{21}+\theta_{10}) = -\frac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10} \\ \sin(\theta_{21}+\theta_{10}) = \frac{\lambda_{30}}{L_2} - \frac{L_1}{L_2}\sin\theta_{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2(\theta_{21}+\theta_{10}) = \left[\frac{L_1}{L_2}\right]^2\cos^2\theta_{10} \\ \sin^2(\theta_{21}+\theta_{10}) = \left[\frac{\lambda_{30}}{L_2} - \frac{L_1}{L_2}\sin\theta_{10}\right]^2 \end{cases}$$

$$\cos^2\left(\theta_{2/1}\theta_{21}+\theta_{10}\right) + \sin^2(\theta_{21}+\theta_{10}) = 1$$
$$\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^2\cos^2\theta_{10} + \left[\frac{\lambda_{30}}{L_2} - \frac{L_1}{L_2}\sin\theta_{10}\right]^2 = 1$$

Ne pas développer :

$${L_1}^2\cos^2\theta_{10} + [\lambda_{30} - L_1\sin\theta_{10}]^2 = {L_2}^2$$
$${L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10} = [\lambda_{30} - L_1\sin\theta_{10}]^2$$

Pour passer à la racine, il faut :

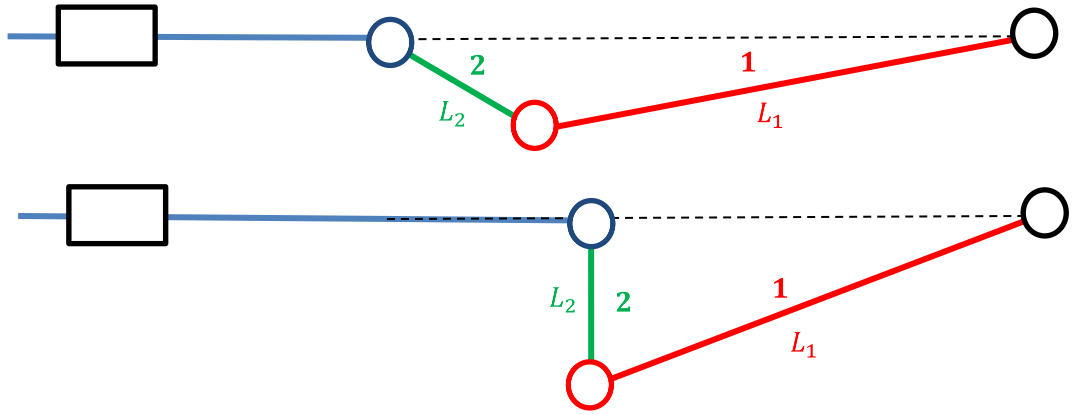
$$L_2{}^2 - L_1{}^2 \cos^2 \theta_{10} \geq 0$$

Soit :

$$L_2{}^2 \geq L_1{}^2 \cos^2 \theta_{10}$$

Pour que $L_2{}^2 \leq L_1{}^2 \cos^2 \theta_{10}$ quelque soit θ_{10}, il faut : $L_2 \geq L_1$

Si $L_2 < L_1$:



On ne peut pas faire de tours de la pièce 1.
Donc, si $L_2 \geq L_1$:

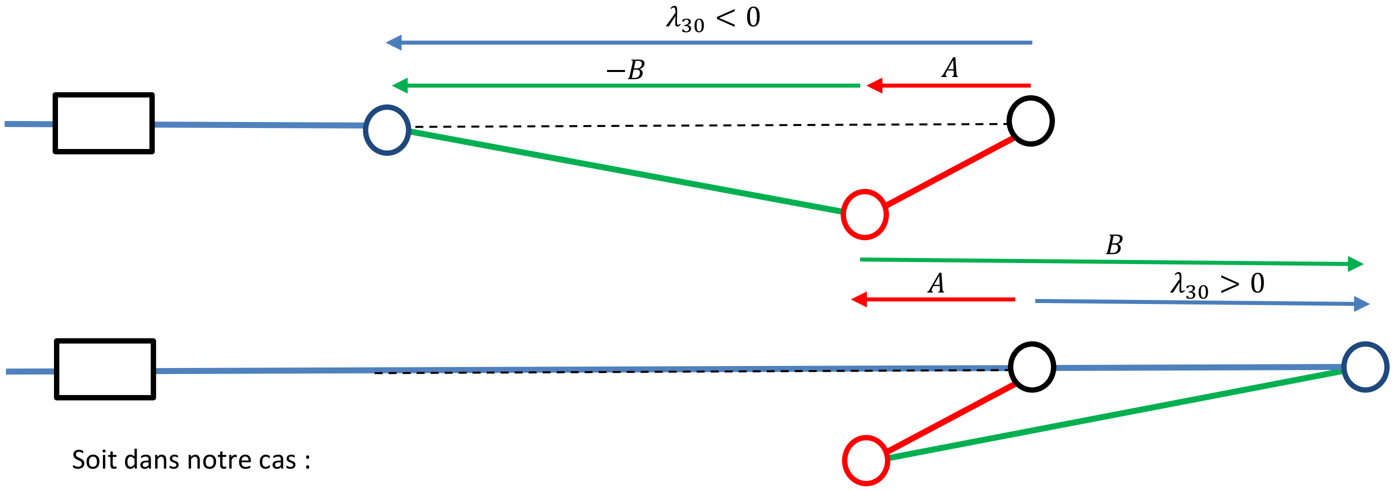
$$L_2{}^2 - L_1{}^2 \cos^2 \theta_{10} = [\lambda_{30} - L_1 \sin \theta_{10}]^2$$

$$\lambda_{30} - L_1 \sin \theta_{10} = \pm \sqrt{L_2{}^2 - L_1{}^2 \cos^2 \theta_{10}}$$

$$\lambda_{30} = L_1 \sin \theta_{10} \pm \sqrt{L_2{}^2 - L_1{}^2 \cos^2 \theta_{10}}$$

Il existe deux solutions à ce problème, dépendant de la façon dans laquelle a été monté le système.

$$\lambda_{30} = -A \pm \mathrm{B} \quad ; \quad (A, B) > 0$$



Soit dans notre cas :

$$\boxed{\lambda_{30} = L_1 \sin \theta_{10} - \sqrt{L_2{}^2 - L_1{}^2 \cos^2 \theta_{10}}}$$

Question 3: En déduire les expressions des autres paramètres géométriques θ_{32} et θ_{21} en fonction du seul paramètre géométrique θ_{10} et des constantes

On part des 3 équations géométriques :

$$\begin{cases} L_1 \cos\theta_{10} + L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10}) = 0 \\ L_1 \sin\theta_{10} + L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) - \lambda_{30} = 0 \\ \theta_{10}+\theta_{21}+\theta_{32}+\dfrac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

On peut au choix utiliser un arccos, arcsin, ou arctan pour exprimer $\theta_{21}+\theta_{10}$. Compte tenu du mécanismes étudié, $\theta_{21}+\theta_{10}$ étant l'angle $(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_2})$, cet angle évolue dans l'intervalle $[-\pi,0]$. On choisit dont l'arccos :

$$\cos(\theta_{21}+\theta_{10}) = -\frac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10} \Leftrightarrow \theta_{21}+\theta_{10} = -\cos^{-1}\left(-\frac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10}\right)$$

$$\boxed{\theta_{21} = -\theta_{10} - \cos^{-1}\left(-\frac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10}\right)}$$

Rien de plus simple ensuite :

$$\theta_{10}+\theta_{21}+\theta_{32}+\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\theta_{32} = -\frac{\pi}{2} - \theta_{10} - \theta_{21} = -\frac{\pi}{2} - \theta_{10} + \theta_{10} + \cos^{-1}\left(-\frac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10}\right)$$

$$\boxed{\theta_{32} = \cos^{-1}\left(-\frac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10}\right) - \frac{\pi}{2}}$$

Question 4: Exprimer $\tan(\theta_{21}+\theta_{10})$ en fonction du seul paramètre géométrique θ_{10} et des constantes (utile dans la suite)

$$\begin{cases} \cos(\theta_{21}+\theta_{10}) = -\dfrac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10} \\ \sin(\theta_{21}+\theta_{10}) = \dfrac{\lambda_{3/0}}{L_2} - \dfrac{L_1}{L_2}\sin\theta_{10} = \dfrac{\lambda_{30} - L_1\sin\theta_{10}}{L_2} \end{cases}$$

$$\tan(\theta_{21}+\theta_{10}) = \frac{\sin(\theta_{21}+\theta_{10})}{\cos(\theta_{21}+\theta_{10})} = \frac{\dfrac{\lambda_{30} - L_1\sin\theta_{10}}{L_2}}{-\dfrac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10}} = \frac{L_1\sin\theta_{10} - \lambda_{30}}{L_1\cos\theta_{10}}$$

$$= \frac{L_1\sin\theta_{10} - \left(L_1\sin\theta_{10} - \sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10}}\right)}{L_1\cos\theta_{10}} = \frac{\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10}}}{L_1\cos\theta_{10}}$$

$$\boxed{\tan(\theta_{21}+\theta_{10}) = \frac{\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10}}}{L_1\cos\theta_{10}}}$$

Question 5: Exprimer la relation $\dot{\lambda}_{30} = f(\dot{\theta}_{10})$, faisant intervenir les paramètres géométriques – On fera apparaître $\tan(\theta_{21} + \theta_{10})$ dans l'expression

$$\lambda_{30} = L_1 \sin\theta_{10} - \sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2 \cos^2\theta_{10}}$$

$$\dot{\lambda}_{30} = \dot{\theta}_{10} L_1 \cos\theta_{10} - \frac{-2\dot{\theta}_{10}{L_1}^2(-\sin\theta_{10})\cos\theta_{10}}{2\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2 \cos^2\theta_{10}}}$$

$$\dot{\lambda}_{30} = \dot{\theta}_{10} L_1 \left[\cos\theta_{10} - \frac{L_1 \sin\theta_{10}\cos\theta_{10}}{\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2 \cos^2\theta_{10}}}\right]$$

$$\dot{\lambda}_{30} = \dot{\theta}_{10} L_1 \left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21} + \theta_{10})}\right]$$

Etude cinématique

Question 6: Proposer les 4 torseurs cinématiques des liaisons du mécanismes, et réalisez les choix de points et bases qui seront utiles pour la suite

$\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{32} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0}$
$\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$
$\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{10} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$
$\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{03} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$

Question 7: Etablir les 2 équations vectorielles de la fermeture cinématique du système en B

$$\{\mathcal{V}_{21}\} + \{\mathcal{V}_{10}\} + \{\mathcal{V}_{03}\} + \{\mathcal{V}_{32}\} = 0$$

$\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} R_{32}\overrightarrow{z_0} \\ -L_2R_{32}\overrightarrow{y_2} \end{Bmatrix}_B$	$\vec{V}(B,3/2) = \vec{V}(C,3/2) + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{32}}$ $= L_2\overrightarrow{x_2} \wedge R_{32}\overrightarrow{z_2} = -L_2R_{32}\overrightarrow{y_2}$
$\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} R_{21}\overrightarrow{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$	
$\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} R_{10}\overrightarrow{z_0} \\ L_1R_{10}\overrightarrow{y_1} \end{Bmatrix}_B$	$\vec{V}(B,3/2) = \vec{V}(A,3/2) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{32}}$ $= -L_1\overrightarrow{x_1} \wedge R_{10}\overrightarrow{z_1} = L_1R_{10}\overrightarrow{y_1}$
$\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_{03}\overrightarrow{y_0} \end{Bmatrix}_B$	

$$\begin{Bmatrix} (R_{32} + R_{21} + R_{10})\overrightarrow{z_0} \\ V_{03}\overrightarrow{y_0} + L_1R_{10}\overrightarrow{y_1} - L_2R_{32}\overrightarrow{y_2} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Question 8: Etablir les 3 équations de la fermeture cinématique du système dans $\mathfrak{B}_0$

$$\boxed{\begin{cases} R_{32} + R_{21} + R_{10} = 0 \ (1) \\ -L_1 \sin\theta_{10} R_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \ (2) \\ V_{03} + L_1 \cos\theta_{10} R_{10} - L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \ (3) \end{cases}}$$

Question 9: Déterminer les 3 inconnues R_{32}, R_{21} et V_{30} en fonction de l'unique inconnue cinématique R_{10} et des paramètres géométriques

R_{32} Equation (2)	$R_{32} = \frac{L_1 \sin\theta_{10}}{L_2 \sin(\theta_{21}+\theta_{10})} \boldsymbol{R_{10}}$
R_{21} Equation (1)	$R_{21} = -R_{32} - \boldsymbol{R_{10}}$ $R_{21} = -\frac{L_1 \sin\theta_{10}}{L_2 \sin(\theta_{21}+\theta_{10})} \boldsymbol{R_{10}} - \boldsymbol{R_{10}}$ $R_{21} = -\boldsymbol{R_{10}} \frac{L_1 \sin\theta_{10} + L_2 \sin(\theta_{21}+\theta_{10})}{L_2 \sin(\theta_{21}+\theta_{10})}$
V_{30} Equation (3)	$V_{03} = -L_1 \cos\theta_{10} \boldsymbol{R_{10}} + L_2 \cos(\theta_{21}+\theta_{10}) R_{32}$ $V_{03} = -L_1 \cos\theta_{10} \boldsymbol{R_{10}} + L_2 \cos(\theta_{21}+\theta_{10}) \frac{L_1 \sin\theta_{10}}{L_2 \sin(\theta_{21}+\theta_{10})} \boldsymbol{R_{10}}$ $V_{03} = L_1 \boldsymbol{R_{10}} \left[\cos(\theta_{21}+\theta_{10}) \frac{\sin\theta_{10}}{\sin(\theta_{21}+\theta_{10})} - \cos\theta_{10}\right]$ $V_{30} = L_1 \boldsymbol{R_{10}} \left[\cos\theta_{10} - \cos(\theta_{21}+\theta_{10}) \frac{\sin\theta_{10}}{\sin(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]$ $V_{30} = L_1 \boldsymbol{R_{10}} \left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]$

Question 10: Exprimer V_{30} en fonction de l'unique inconnue cinématique R_{10}, de l'unique paramètre géométrique variable θ_{10} et des constantes

$$\tan(\theta_{21}+\theta_{10}) = \frac{\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2 \cos^2\theta_{10}}}{L_1 \cos\theta_{10}}$$

$$V_{30} = L_1 \boldsymbol{R_{10}} \left[\cos\theta_{10} - \frac{L_1 \cos\theta_{10} \sin\theta_{10}}{\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2 \cos^2\theta_{10}}}\right]$$

Question 11: Comparer la relation entrée/sortie obtenue par fermeture cinématique avec la relation issue de la fermeture géométrique dérivée

$$\{\mathcal{V}_{30}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_{30}\overrightarrow{y_0} \end{Bmatrix}_B \quad ; \quad \overrightarrow{AC} = \lambda_{30}\overrightarrow{y_0}$$

$$\vec{V}(C,3/0) = \begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{AC}}{dt} = \dot{\lambda}_{30}\overrightarrow{y_0} \Rightarrow \dot{\lambda}_{30} = V_{30} \\ V_{30}\overrightarrow{y_0} \end{cases}$$

Du fait des conventions choisies : $\Omega_{10} = \dot{\theta}_{10} \quad ; \quad V_{30} = \dot{\lambda}_{30}$

Ca n'est pas vrai si par exemple : $\overrightarrow{AC} = -\lambda_{30}\overrightarrow{y_0} = \lambda_{30}\overrightarrow{x_3}$ et/ou $\{\mathcal{V}_{30}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ U_{30}\overrightarrow{x_3} \end{Bmatrix}_B$

Donc :

$$V_{30} = L_1\Omega_{10}\left[\cos\theta_{1/0} - \frac{\sin\theta_{1/0}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]$$

$$\dot{\lambda}_{30} = \dot{\theta}_{10}L_1\left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]$$

Nous obtenons le même résultat qu'avec la fermeture géométrique 😊

Question 12: Mettre le système sous forme matricielle, discuter de sa solvabilité et proposer une démarche de résolution matricielle

$$\begin{cases} R_{32} + R_{21} + R_{10} = 0 \ (1) \\ -L_1\sin\theta_{10} R_{10} + L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) R_{32} = 0 \ (2) \\ V_{03} + L_1\cos\theta_{10} R_{10} - L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10}) R_{32} = 0 \ (3) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{-L_1\sin\theta_{10}} & \mathbf{0} & \boldsymbol{L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10})} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{L_1\cos\theta_{10}} & \mathbf{0} & \boldsymbol{-L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10})} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{10} \\ R_{21} \\ R_{32} \\ V_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bilan :

- $I_c = 4$ inconnues cinématiques
- $E_c = 3$ équations cinématiques

En admettant qu'elles sont linéairement indépendantes ($r_c = 3$), il faut fixer une inconnue pour déterminer les autres, ce que l'on appellera la mobilité : $m = I_c - r_c$

Pour résoudre, il faut modifier le système linéaire selon l'entrée choisie :

$$\begin{cases} R_{32} + R_{21} = -R_{10} \\ L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) R_{32} = L_1\sin\theta_{10} R_{10} \\ V_{03} - L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10}) R_{32} = -L_1\cos\theta_{10} R_{10} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) & 0 \\ 0 & -L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{21} \\ R_{32} \\ V_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{10} \\ L_1\sin\theta_{10} R_{10} \\ -L_1\cos\theta_{10} R_{10} \end{bmatrix}$$

Etude statique complète

Question 13: Proposer les 4 torseurs statiques des liaisons du mécanismes, et réalisez les choix de points et bases qui seront utiles pour la suite

Liaison	Torseur statique
L_{10} Pivot d'axe (A, $\vec{z}$)	$\{\mathcal{T}_{1\to 0}\} = \begin{Bmatrix} X_{10} & 0 \\ Y_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$
L_{21} Pivot d'axe (B, $\vec{z}$)	$\{\mathcal{T}_{2\to 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$
L_{32} Pivot d'axe (C, $\vec{z}$)	$\{\mathcal{T}_{3\to 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0}$
L_{03} Glissière de direction $\vec{z}$	$\{\mathcal{T}_{0\to 3}\} = \begin{Bmatrix} X_{03} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{03} \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0}$

Question 14: Déterminer les 3 équations issues de l'isolement de la pièce 1 en B dans $\mathfrak{B}_0$

$$\{\mathcal{T}_{0/1}\} + \{\mathcal{T}_{2/1}\} + \{\mathcal{T}_{ext\to 1}\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} + \begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0} = \{0\}$$

$\begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$	$\overrightarrow{M_B}(\overrightarrow{R_{01}}) = \overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{R_{01}}) + \overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{R_{01}}$ $= \begin{bmatrix} -L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1} \wedge \begin{bmatrix} X_{01} \\ Y_{01} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$ $= \begin{bmatrix} -L_1\cos\theta_{10} \\ -L_1\sin\theta_{10} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0} \wedge \begin{bmatrix} X_{01} \\ Y_{01} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$ $= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1\cos\theta_{10} Y_{01} + L_1\sin\theta_{10} X_{01} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$	$\begin{Bmatrix} X_{01}\overrightarrow{x_0} + Y_{01}\overrightarrow{y_0} \\ (-L_1\cos\theta_{10} Y_{01} + L_1\sin\theta_{10} X_{01})\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_B$
$\begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$	RAS	$\begin{Bmatrix} X_{21}\overrightarrow{x_0} + Y_{21}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$
$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$	RAS	$\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_B$

$$\begin{Bmatrix} X_{01}\overrightarrow{x_0} + Y_{01}\overrightarrow{y_0} \\ (-L_1\cos\theta_{10} Y_{01} + L_1\sin\theta_{10} X_{01})\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} X_{21}\overrightarrow{x_0} + Y_{21}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

$$\begin{cases} (X_{01} + X_{21})\overrightarrow{x_0} + (Y_{01} + Y_{21})\overrightarrow{y_0} = \vec{0} \\ (-L_1\cos\theta_{10} Y_{01} + L_1\sin\theta_{10} X_{01} + C)\overrightarrow{z_0} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} X_{01} + X_{21} = 0 \\ Y_{01} + Y_{21} = 0 \\ -L_1\cos\theta_{10} Y_{01} + L_1\sin\theta_{10} X_{01} + C = 0 \end{cases}}$$

Question 15: Déterminer les 3 équations issues de l'isolement de la pièce 2 en B dans $\mathfrak{B}_0$

$$\{\mathcal{T}_{1/2}\} + \{\mathcal{T}_{3/2}\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0} + \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}}$$

$\begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0}$	$\overrightarrow{M_B}(\overrightarrow{R_{32}}) = \overrightarrow{M_C}(\overrightarrow{R_{32}}) + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{R_{32}}$ $= \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_2} \wedge \begin{bmatrix} X_{32} \\ Y_{32} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$ $= \begin{bmatrix} L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) \\ L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0} \wedge \begin{bmatrix} X_{32} \\ Y_{32} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$ $= (L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) Y_{32} - L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) X_{32})\overrightarrow{z_0}$	$\begin{Bmatrix} X_{32}\overrightarrow{x_0} + Y_{32}\overrightarrow{y_0} \\ (L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) Y_{32} - L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) X_{32})\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_B$
$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$	RAS	$\begin{Bmatrix} X_{12}\overrightarrow{x_0} + Y_{12}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$

$$\begin{Bmatrix} X_{32}\overrightarrow{x_0} + Y_{32}\overrightarrow{y_0} \\ (L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) Y_{32} - L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) X_{32})\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} X_{12}\overrightarrow{x_0} + Y_{12}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

$$\begin{cases} (X_{32} + X_{12})\overrightarrow{x_0} + (Y_{32} + Y_{12})\overrightarrow{y_0} = \vec{0} \\ (L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) Y_{32} - L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) X_{32})\overrightarrow{z_0} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} X_{32} + X_{12} = 0 \\ Y_{32} + Y_{12} = 0 \\ L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) Y_{32} - L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) X_{32} = 0 \end{cases}}$$

Question 16: Déterminer les 3 équations issues de l'isolement de la pièce 3 en C dans $\mathfrak{B}_0$

$$\{\mathcal{T}_{ext/3}\} + \{\mathcal{T}_{2/3}\} + \{\mathcal{T}_{0/3}\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0} + \begin{Bmatrix} X_{23} & 0 \\ Y_{23} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0} + \begin{Bmatrix} X_{03} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{03} \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}}$$

$$\begin{cases} (X_{23} + X_{03})\overrightarrow{x_0} + (F + Y_{23})\overrightarrow{y_0} = \vec{0} \\ N_{03}\overrightarrow{z_0} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} X_{23} + X_{03} = 0 \\ F + Y_{23} = 0 \\ N_{03} = 0 \end{cases}}$$

Question 17: En déduire le système de 9 équations du problème statique

$$\boxed{\begin{cases} X_{01} + X_{21} = 0 \\ Y_{01} + Y_{21} = 0 \\ -L_1 \cos\theta_{10}\, Y_{01} + L_1 \sin\theta_{10}\, X_{01} + \boldsymbol{C} = 0 \\ X_{32} + X_{12} = 0 \\ Y_{32} + Y_{12} = 0 \\ L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10})\, Y_{32} - L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10})\, X_{32} = 0 \\ X_{23} + X_{03} = 0 \\ \boldsymbol{F} + Y_{23} = 0 \\ N_{03} = 0 \end{cases}}$$

Question 18: Mener la résolution de ce système pour trouver les 8 inconnues de liaison et la relation entre F et C

$$\left\{\begin{aligned} X_{01} + X_{21} &= 0 \\ Y_{01} + Y_{21} &= 0 \\ -L_1 \cos\theta_{10}\, Y_{01} + L_1 \sin\theta_{10}\, X_{01} + \boldsymbol{C} &= 0 \\ X_{32} + X_{12} &= 0 \\ Y_{32} + Y_{12} &= 0 \\ L_2 \cos(\theta_{21}+\theta_{10})\, Y_{32} - L_2 \sin(\theta_{21}+\theta_{10})\, X_{32} &= 0 \\ X_{23} + X_{03} &= 0 \\ \boldsymbol{F} + Y_{23} &= 0 \\ N_{03} &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} X_{01} &= -\frac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\boldsymbol{F} \\ Y_{01} &= -\boldsymbol{F} \\ L_1 \cos\theta_{10}\, \boldsymbol{F} - L_1 \sin\theta_{10} \frac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{C} &= 0 \\ X_{12} &= -\frac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\boldsymbol{F} \\ Y_{12} &= -F \\ X_{32} &= \frac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\boldsymbol{F} \\ X_{03} &= \frac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\boldsymbol{F} \\ Y_{23} &= -\boldsymbol{F} \\ N_{03} &= 0 \end{aligned}\right.$$

Il reste l'équation suivante, dans laquelle tout est connu :

$$L_1 \cos\theta_{10}\, \boldsymbol{F} - L_1 \sin\theta_{10} \frac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{C} = 0$$

$$\boxed{C = -L_1 \left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right] F}$$

Cette équation traduit une mobilité. Comme il y a un mouvement possible, on met bien en relation l'effort qui peut induire un mouvement avec le couple transmis à travers cette mobilité.

Question 19: Mettre le système sous forme matricielle, discuter de sa solvabilité et proposer une démarche de résolution numérique

Bilan :

- $I_s = 8$ inconnues statiques
- $E_s = 9$ équations statiques

Le système se résout directement et il reste une équation dans laquelle tout est connu. C'est l'équation de mobilité liée à la relation entre effort d'entrée et effort de sortie : $m = E_s - r_s$

On appelle $h = I_s - r_s$ l'hyperstatisme, ou le nombre d'inconnues indéterminées, il est nul ici.

Mise sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_1 \sin\theta_{10} & -L_1\cos\theta_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) & L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{01} \\ Y_{01} \\ X_{21} \\ Y_{21} \\ X_{32} \\ Y_{32} \\ X_{03} \\ N_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\boldsymbol{C} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\boldsymbol{F} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Etude statique par stratégie d'isolements

Question 20: Justifier le fait que $\overrightarrow{R_{21}} = R_{21}\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{R_{32}} = R_{32}\overrightarrow{x_2}$

Solide 2 soumis à 2 glisseurs…

Question 21: Justifier le fait que $Y_{32} = F$ et déterminer l'expression de R_{32}

On isole 3 : TRS sur $\overrightarrow{y_0}$: $F + Y_{23} = 0$

$$Y_{32} = R_{32}\overrightarrow{x_2}.\overrightarrow{y_0} = R_{32}\cos\left(\widehat{\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_0}}\right) = R_{32}\cos\left(\frac{\pi}{2} - (\theta_{21} + \theta_{10})\right) = R_{32}\sin(\theta_{21} + \theta_{10})$$

$$R_{32} = \frac{Y_{32}}{\sin(\theta_{21} + \theta_{10})} = \frac{F}{\sin(\theta_{21} + \theta_{10})}$$

Question 22: En déduire la relation entre F et C

On isole 1 : TMS en A sur $\overrightarrow{z_0}$: $C + \overrightarrow{M_A(\overrightarrow{R_{21}})}.\overrightarrow{z_0} = 0$

$$\overrightarrow{M_A(\overrightarrow{R_{21}})} = \overrightarrow{M_A(R_{21}\overrightarrow{x_2})} = \overrightarrow{AB} \wedge R_{21}\overrightarrow{x_2} = L_1\overrightarrow{x_1} \wedge R_{32}\overrightarrow{x_2} = \begin{bmatrix} L_1\cos\theta_{10} \\ L_1\sin\theta_{10} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0} \wedge \begin{bmatrix} R_{32}\cos(\theta_{21}+\theta_{10}) \\ R_{32}\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$$

On aurait pu mettre dans les bases 1 ou 2, mais on aurait un résultat différent de ce que l'on a obtenu avant. Il aurait ensuite fallu faire de la trigo avec : $\theta_{21} = (\theta_{21} + \theta_{10}) + \theta_{01}$

$$\overrightarrow{M_A(\overrightarrow{R_{21}})} = [L_1\cos\theta_{10}\,R_{32}\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) - L_1\sin\theta_{10}\,R_{32}\cos(\theta_{21}+\theta_{10})]\overrightarrow{z_0}$$

$$\overrightarrow{M_A(\overrightarrow{R_{21}})} = \left[L_1\cos\theta_{10}\frac{F}{\sin(\theta_{21}+\theta_{10})}\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) - L_1\sin\theta_{10}\frac{F}{\sin(\theta_{21}+\theta_{10})}\cos(\theta_{21}+\theta_{10})\right]\overrightarrow{z_0}$$

$$\overrightarrow{M_A(\overrightarrow{R_{21}})} = L_1\left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]F$$

D'où :

$$C + L_1\left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]F = 0$$

$$\frac{C}{F} = -L_1\left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]$$

Etude dynamique (5/2)

Question 23: Retrouver la relation statique entrée/sortie à l'aide du TEC et de la relation cinématique entrée/sortie

$$\{\mathcal{T}_{ext\to 1}\}\{\mathcal{V}_{10}\} + \{\mathcal{T}_{ext\to 3}\}\{\mathcal{V}_{30}\} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{10} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{30} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0} = 0$$

$$CR_{1/0} + FV_{30} = 0$$

$$C = -F\frac{V_{30}}{R_{10}}$$

En utilisant la relation cinématique obtenu précédemment :

$$V_{30} = L_1 R_{10}\left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]$$

$$C = -F\frac{L_1 R_{10}\left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]}{R_{1/0}}$$

$$C = -L_1\left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]F$$